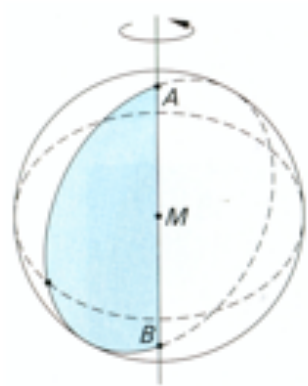
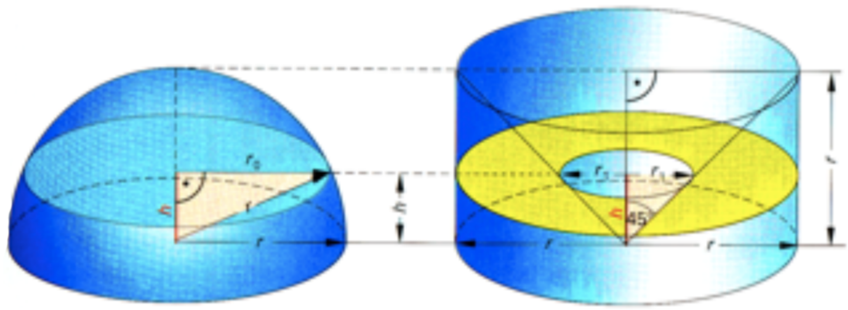
Die Kugel

Rotiert ein Halbkreis um eine Achse, die den Durchmesser $\overline{AB}$ enthält, so entsteht eine Kugel. Der Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ ist der Kugelmittelpunkt.



Volumen der Kugel:

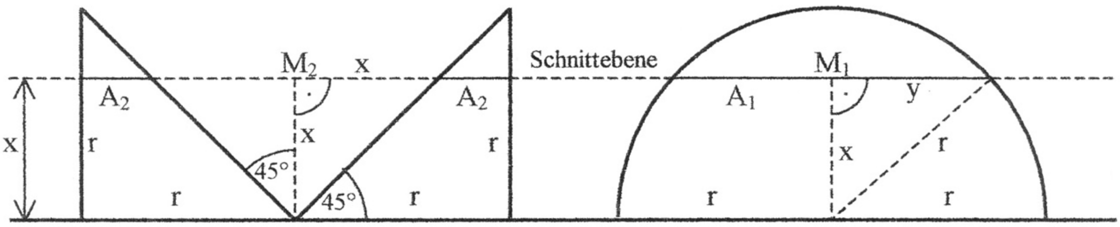
Man muss sich zur Volumenbestimmung einer Kugel einen Cavalierischen Vergleichskörper suchen. Zunächst einmal ist klar, dass das Volumen einer Halbkugel zwischen dem Volumen eines Kegels und eines Zylinders liegt. Als Vergleichskörper nimmt man einen Zylinder, aus dem ein Kegel herausgebohrt wurde.



Für das Volumen einer Kugel mit dem Radius r gilt:

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

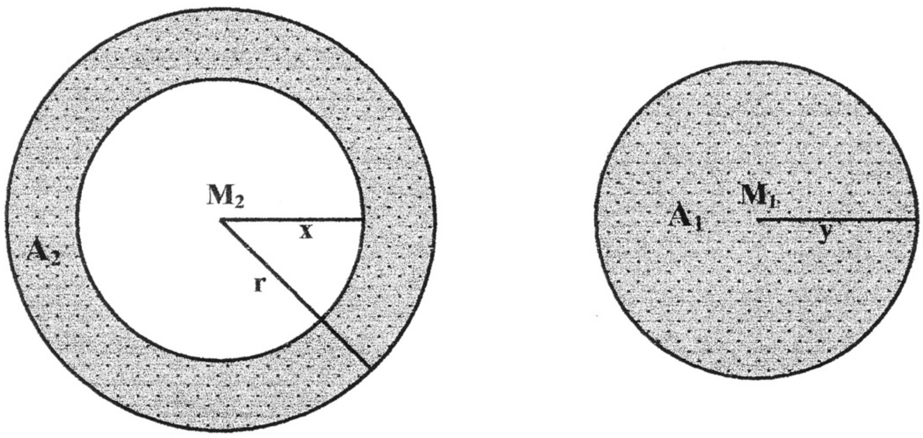
Cavalierischer Vergleichskörper | Halbkugel



Pythagoras: $y^2 = r^2 - x^2$

Schnittfläche:

Kreisring | Kreis



$A_2 = r^2\Pi - x^2\Pi =$
$= \left(r^2 - x^2\right)\cdot \Pi$

$\xleftrightarrow{\text{gleiche Schnittflächen}}$

$A_1 = y^2\Pi =$
$= \left(r^2 - x^2\right)\cdot \Pi$

$V_{\text{Vergleichskörper}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}} =$
$= r^3\Pi - \frac{1}{3}r^3\Pi =$
$= \frac{2}{3}r^3\Pi$

$\Longrightarrow$ $V_{\text{Halbkugel}} = \frac{2}{3}r^3\Pi$

$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}r^3\Pi$

Die Oberfläche der Kugel:

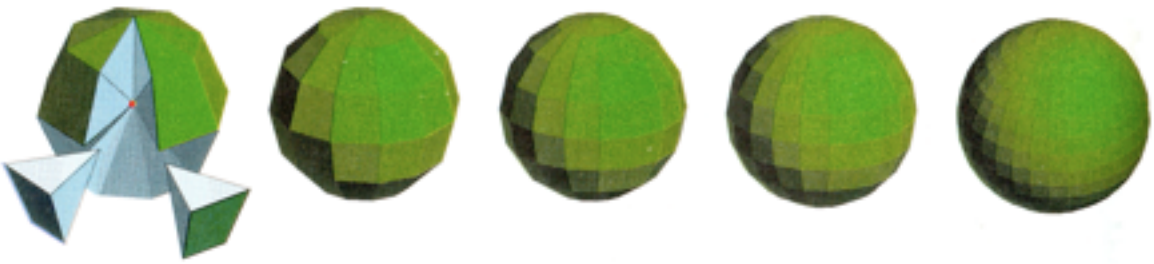
Die vom Kreisbogen AB überstrichene Fläche bei der Rotation des Halbkreises ist die Oberfläche der Kugel.

Zur Bestimmung der Oberfläche einer Kugel kann man sich Pyramiden vorstellen, die einer Kugel einbeschrieben sind und die ohne Lücke aneinanderstoßen und alle den Kugelmittelpunkt als Spitze besitzen.
Die Pyramiden haben zusammen ein Volumen V^*, das auf jeden Fall kleiner als das Kugelvolumen ist. Macht man die Grundfläche der Pyramiden genügend klein, so nähert sich die Summe ihrer Flächeninhalte A_n dem Inhalt der Kugeloberfläche. Die Höhen der Pyramiden nähern sich dem Radius r und das Volumen V^* dem Kugelvolumen.

$$V^* = \frac{1}{3}\cdot A_1 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\cdot A_2 \cdot h_2 + ... + \frac{1}{3}\cdot A_n \cdot h_n = \frac{1}{3}\cdot \text{Grundflächen Pyramiden} \cdot h$$

$$\text{Für n groß gilt: } V_{Kugel} = V^* \quad \Rightarrow \frac{4}{3}\cdot r^3 \cdot \pi = \frac{1}{3}\cdot \text{Oberfläche Kugel} \cdot r$$

$$\Rightarrow \text{Oberfläche}_{Kugel} = \frac{4}{3}\cdot r^3 \cdot \pi \cdot \frac{3}{r} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$



Für die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius r gilt also:

$O_{Kugel} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$